



Une méthode non incrémentale d'homogénéisation de structures élastomères Démonstration de la convergence

Mathias Brieu, Jocelyne Erhel

► To cite this version:

Mathias Brieu, Jocelyne Erhel. Une méthode non incrémentale d'homogénéisation de structures élastomères Démonstration de la convergence. [Rapport de recherche] RR-3599, INRIA. 1999. inria-00073080

HAL Id: inria-00073080

<https://inria.hal.science/inria-00073080>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

b

***Une méthode non incrémentale
d'Homogénéisation de Structures Elastomères
Démonstration de la convergence***

M. Brieu, J. Erhel

No 3599

Janvier 1999

_____ THÈME 4b _____



***rapport
de recherche***

Une méthode non incrémentale d'Homogénéisation de Structures Elastomères *Démonstration de la convergence*

M. Brieu^{*}, J. Erhel[†]

Thème 4b — Simulation et optimisation
de systèmes complexes
Projet Aladin

Rapport de recherche n° 3599 — Janvier 1999 — 39 pages

Résumé : Pour simuler numériquement le comportement mécanique de structures élastomères hyper-élastiques, nous utilisons une méthode d'homogénéisation qui induit des problèmes non linéaires couplés. Ce rapport présente une méthode de résolution non incrémentale dont l'intérêt est de réduire considérablement les coûts de calcul. Nous démontrons que cette méthode est équivalente à une méthode de Newton, ce qui nous permet d'en prouver la convergence, sous des hypothèses réalistes. Des résultats sur un matériau composite illustrent les performances de la méthode.

Mots-clé : Homogénéisation, matériaux hyper élastiques, méthode non incrémentale, méthode de Newton

(Abstract: *pto*)

^{*} LM²S, Université PARIS VI - 8, rue du Capitaine Scott- 75015 Paris ; INRIA, Projet ALADIN, Campus de Beaulieu, 35042 Cedex Rennes, email : mathias.brieu@irisa.fr

[†] INRIA, Projet ALADIN, Campus de Beaulieu, 35042 Cedex Rennes, email : joce-lyne.erhel@irisa.fr

A Non Incremental Homogenization Method for Elastomer Structure *Proof of convergence*

Abstract: In order to simulate the mechanical behavior of non linear elastomeric structures, we use a homogenization technique which induces non linear problems. This report presents a non incremental solving method which allows to reduce the computational costs. We prove the equivalence between the solving method and a Newton-type method, which allows to prove the convergence, under realistic assumptions. Numerical results on a composite illustrate the performances of this method.

Key-words: Homogenization , hyper-elastic structure , non incremental method, Newton type method

1 Introduction

L'utilisation des élastomères, afin d'assumer des tâches de suspension et/ou de liaison, est devenue de plus en plus fréquente dans les industries aéronautiques, ferroviaires, automobiles et spatiales.

Afin d'accroître les performances mécaniques de tels matériaux, il est désormais classique de leur adjoindre des éléments renforçants (fibres, tresses, noirs de carbone ...). Il devient alors très difficile d'estimer les bénéfices à espérer de ces associations. En effet, les méthodes numériques qui calculent la réponse de tels milieux à une sollicitation sont complexes et coûteuses en temps de calcul.

Les premières méthodes développées à cet effet ont consisté en des méthodes dites d'encadrements (Willis, 1981 [24]; Triantafyllidis, Maker, 1985 [23]; Talbot, Willis, 1987 [22]) qui permettent d'obtenir à de très faibles coûts numériques une estimation de la densité d'énergie équivalente de tels milieux. Malheureusement ces méthodes ne permettent pas d'obtenir de manière précise des informations relatives au champ (contraintes et déformations) régnant au niveau des hétérogénéités, lesquelles seront requises par la suite pour appréhender les phénomènes d'endommagement susceptibles d'apparaître. Enfin la précision de ces encadrements est parfois mal définie.

Afin de pallier à ces diverses difficultés, et en supposant une distribution au moins quasi-périodique des renforts, on se propose d'utiliser la technique d'homogénéisation des milieux à structure périodique fine qui permet de donner un sens tout à fait précis à toutes les quantités manipulées.

Néanmoins, les problèmes d'homogénéisation qu'il convient de résoudre alors sont des problèmes non linéaires (non linéarité due au comportement des matériaux) de sorte qu'il est nécessaire de mettre en œuvre une technique de résolution adaptée à ces problèmes.

A cet effet une méthode incrémentale a déjà été développée, et a montré la faisabilité de la démarche quant à la quantité et la qualité des informations mécaniques microscopiques fournies (Devries, 1997 [14]). Malheureusement, comme toute méthode incrémentale, elle nécessite de considérer un nombre suffisamment important d'incrémentes pour assurer la convergence de l'algorithme (Bernadou *et al.*, 1982 [3]). Bien évidemment ce grand nombre d'incrémentes

génère des coûts de calcul importants, de sorte qu'il est apparu nécessaire de développer un autre algorithme de résolution plus performant en terme de coûts de calcul.

Notre choix s'est porté sur une méthode initialement développée pour traiter des problèmes non linéaires de type plasticité (Ladevèze, 1986 [18]). Elle consiste en un algorithme non incrémental de résolution dont le principe repose sur le découplage des équations (linéaires et non linéaires) constitutives des problèmes à résoudre. L'utilisation de cette méthode de résolution aux problèmes d'homogénéisation de structures hyper-élastique permet d'obtenir à des coûts de calcul extrêmement intéressants la réponse de telles structures à des sollicitations données (Brieu, Devries, 1998 [7]). Toutefois la convergence de cette méthode n'a pas, dans ce cas, encore été démontrée.

Le propos de cet article est ainsi de montrer la convergence de cette méthode non incrémentale de résolution, appliquée à des problèmes d'homogénéisation de composites à matrice élastomère.

La première partie de cet article consiste d'une part en une présentation de la nature du problème, et d'autre part en la mise en œuvre de la technique d'homogénéisation des milieux à structure périodique fine.

Après avoir montré l'équivalence entre le problème hétérogène et le problème d'homogénéisation, nous présentons dans une deuxième partie la méthode de résolution retenue, ainsi que les opérateurs de mise en œuvre H^+ et H^- retenus.

Après avoir exprimé cet algorithme au niveau discret, nous démontrons dans une troisième partie que le choix particulier des opérateurs H^+ et H^- implique l'équivalence de cette méthode non incrémentale avec la méthode de Newton, ce qui nous permet de conclure quant à la convergence de la méthode non incrémentale.

Enfin dans une quatrième partie, l'étude d'un certain type de composites permet de montrer quelques résultats mettant en évidence les performances de l'algorithme.

2 Présentation du problème

2.1 Problème hétérogène

On considère un problème d'hyperélasticité en quasi-statique posé en configuration lagrangienne Ω (ou configuration de référence) d'une structure fortement hétérogène. On suppose les efforts volumiques négligeables.

On cherche $(\mathbf{T}^\varepsilon, \mathbf{U}^\varepsilon)$ solution de :

$$(1) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{T}^\varepsilon = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T}^\varepsilon = \frac{\partial e^\varepsilon}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{F}^\varepsilon) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F}^\varepsilon = \mathbf{1} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^\varepsilon & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T}(\mathbf{N}) = \mathbf{g} & \text{sur } \partial\Omega_g \\ \mathbf{U} = \mathcal{U} & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases}$$

où $\operatorname{div}_{\mathbf{x}}, \nabla_{\mathbf{x}}$ sont les opérateurs divergence et gradient par rapport à la variable d'espace \mathbf{x} , \mathbf{N} la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$ (bord de Ω), $\partial\Omega_g$ la partie de $\partial\Omega$ où des efforts sont imposés et $\partial\Omega_u$ la partie de $\partial\Omega$ où des déplacements sont imposés.

Comme chaque constituant est considéré comme homogène et isotrope, on peut exprimer (Rivlin, 1948 [21]) pour chacun de ces matériaux leur densité d'énergie e^ε en fonction des invariants i_1, i_2, i_3 du tenseur des dilatations \mathbf{C} ,

où $\mathbf{C} = {}^t\mathbf{F}^\varepsilon \mathbf{F}^\varepsilon$

$$\text{et } \begin{cases} i_1 = \det \mathbf{C} \\ i_2 = \frac{1}{2}[(\det \mathbf{C})^2 - \det(\mathbf{C}^2)] \\ i_3 = \operatorname{tr}(\mathbf{C}) \end{cases}$$

avec ${}^t\mathbf{F}^\varepsilon$ le transposé de \mathbf{F}^ε , $\det \mathbf{C}$ le déterminant de \mathbf{C} et $\operatorname{tr}(\mathbf{C})$ la trace de \mathbf{C}

C'est à dire $e^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{F}^\varepsilon) = e^\varepsilon(\mathbf{x}, i_1, i_2, i_3)$.

Théorème 2.1 *Le problème (1) admet au moins une solution sous les hypothèses suivantes :*

$\mathcal{H}_1 : \Omega$ domaine borné lipschitzien de \mathbb{R}^3

$\mathcal{H}_2 : e^\varepsilon(\mathbf{x}, \bullet)$ continue pour presque tout $x \in \Omega$

$\mathcal{H}_3 : e^\varepsilon(\bullet, \mathbf{F})$ mesurable $\forall \mathbf{F} \in [L^2(\Omega)]^9$

$\mathcal{H}_4 : e^\varepsilon(\mathbf{x}, i_1, i_2, i_3)$ convexe par rapport à i_1, i_2, i_3

$\mathcal{H}_5 : \exists K_1 > 0, \gamma \geq 2, \exists b(x) \in L^1(\Omega)$ tel que

$$\forall \mathbf{F} \in [L^2(\Omega)]^9 \quad e^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{F}) \geq b(x) + K_1 \|\mathbf{F}\|_\Omega^\gamma$$

$$\text{avec } \|\mathbf{F}\|_\Omega^2 = \sum_{i=1, j=1}^3 \|F_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

\mathcal{H}_5 : les conditions aux limites permettent d'obtenir un problème bien posé (Duvaut, 1990 [16])

Preuve. Pour la démonstration nous renvoyons le lecteur à Ball, 1977 [1], Dumontet, 1984 [15]. \square

La résolution de (1) passe par une discrétisation de type éléments finis par exemple. Toutefois la structure considérée est constituée d'un ensemble de matériaux de comportements différents formant ainsi une structure hétérogène. De plus la taille des hétérogénéités est très petite devant la taille de la structure. Une discrétisation nécessiterait alors des maillages d'une extrême finesse, induisant des coûts de calcul prohibitifs.

Il est donc classique, afin d'éviter ces coûts numériques, de substituer à l'étude de (1) un problème d'homogénéisation bien adapté à ce type de problème (Bensoussan *et al.*, 1978 [2]; Müller, 1987 [20]).

2.2 Problème d'homogénéisation

La technique que nous avons retenue, d'utilisation courante pour l'étude de composites Y-périodiques de comportement linéaire, permet d'obtenir, tant au niveau de la structure \mathcal{B} que des hétérogénéités, de nombreuses informations précises.

On recherche les positions d'équilibre d'une structure fortement hétérogène \mathcal{B} occupant dans sa configuration de référence un domaine borné Ω de \mathbb{R}^3 . Ses constituants sont choisis de comportement hyperélastique et les hétérogénéités supposées réparties de façon périodique au sein de \mathcal{B} , de sorte que l'on peut introduire une période, ou cellule de base, notée Y , à partir de laquelle toute la structure peut être reconstruite.

En notant par H une dimension caractéristique de la cellule de base Y et par L celle de la structure \mathcal{B} , on définit le paramètre ε comme suit :

$$(2) \quad \varepsilon = \frac{H}{L}$$

Ce paramètre permet de quantifier le degré d'hétérogénéités présentes au sein de la structure. On suppose que le nombre d'hétérogénéités est suffisamment important de sorte que $\varepsilon \ll 1$.

Le comportement de la structure \mathcal{B} est connu dès que la densité d'énergie e sur une cellule de base Y est donnée, c'est-à-dire dès que l'on connaît la relation :

$$(3) \quad \mathbf{y} \rightarrow e(\mathbf{y}, \mathbf{f}) \text{ } Y \text{ périodique en } \mathbf{y}, \forall \mathbf{f} \in [L^2(Y)]^9, \forall \mathbf{y} \in Y$$

Une fois Y donnée, on peut alors reconstruire géométriquement et "comportementalement" la structure \mathcal{B} par une homothétie de rapport $\frac{1}{\varepsilon}$, de sorte que la densité d'énergie e^ε , définie sur \mathcal{B} , sera donc donnée par :

$$(4) \quad e^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{F}) = e\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \mathbf{F}\right), \forall \mathbf{F} \in [L^2(\Omega)]^9, \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

2.2.1 Mise en œuvre

Afin de déterminer la densité d'énergie E du matériau homogène équivalent (quand ε tend vers 0), c'est-à-dire lorsque la taille des hétérogénéités devient extrêmement petite devant la taille de la structure, introduisons des fonctions tests $\mathbf{V}^\varepsilon \in \mathcal{U}_{ad}$, définies par (Bensoussan, *et al.*, 1978 [2]) :

$$(5) \quad \mathcal{U}_{ad} = \left\{ \mathbf{V} \in [H^1(\Omega)]^3 / \mathbf{V} = \mathcal{U} \text{ sur } \partial\Omega_u \right\}$$

$$(6) \quad \mathbf{V}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{v}\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right)$$

où \mathbf{V} vérifie (7) et \mathbf{v} vérifie (8)

$$(7) \quad \mathbf{V} \in \mathcal{U}_{ad}$$

$$(8) \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{U}_{ad} \quad \forall \mathbf{y} \in Y \text{ et } \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ Y p\'eriodique en } \mathbf{y}$$

En posant $\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$, on introduit deux \'echelles de grandeur distinctes dans le probl\eme :

- une \'echelle dite macroscopique, li\'ee \a la structure \mathcal{B} , pour laquelle la taille des h\'et\'erog\'en\'eit\'es est tr\es petite devant l'unit\'e. Le rep\ere qui lui est associ\'e est not\'e $(O, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$;
- une \'echelle dite microscopique, li\'ee \a la cellule de base Y , par rapport \a laquelle la taille des h\'et\'erog\'en\'eit\'es est de l'ordre de l'unit\'e. Le rep\ere qui lui est associ\'e est $(O, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)$ (avec $y_i = \frac{x_i}{\varepsilon}$).

Th\'eor\eme 2.2 *Sous les hypoth\eses \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_5 et les suivantes :*

- \mathcal{H}_6 : $e(\mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{F}) = e(\mathbf{y}, \mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{z} \in Z^3$ o\`u Z est l'ensemble des entiers relatifs,
- \mathcal{H}_7 : $\exists C > 0, p \in \mathbb{R}$, tel que $C \|\mathbf{F}\|_{\Omega}^p \leq e(\mathbf{y}, \mathbf{F}) \leq C (1 + \|\mathbf{F}\|_{\Omega}^p)$,
- \mathcal{H}_8 : $\left\| \frac{\partial e(\mathbf{y}, \mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \right\|_{\Omega} \leq C (1 + \|\mathbf{F}\|_{\Omega}^p)$,

la densit\'e d'\`energie du mat\'eriel homog\ene \'equivalent, tend vers une densit\'e E ne d\'ependant pas explicitement de \mathbf{y} lorsque ε tend vers 0. Cette densit\'e est d\'efinie par :

$$(9) \quad E = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \min_{\mathbf{V}, \mathbf{v}} \frac{1}{k^3} \frac{1}{|Y|} \int_{kY} e(\mathbf{y}, \mathbf{F}(\mathbf{V}) + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{v}) d\mathbf{y} \right\}$$

o\`u $\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{1} + \nabla_x \mathbf{V}$ et o\`u $|Y|$ est la mesure de Y .

Preuve. Pour la d\'emonstration de ce th\'eor\eme, nous renvoyons le lecteur \a M\uller (1987 [20]). \square

On peut constater dans ce r\'esultat la pr\'esence d'une minimisation sur le nombre k de p\'eriodes Y . Elle permet de prendre en compte les ph\'enom\enes d'instabilit\'e, par exemple le flambement microscopique. Dans le cas o\`u aucune instabilit\'e n'appara\ıt, cette \'etape de minimisation est inutile (Geymonat *et al.*, 1993 [17]), de sorte que l'on a $k = 1$.

2.2.2 Problème d'homogénéisation

Ainsi résoudre le problème (1) équivaut, dans la mesure où ε tend vers 0, et qu'aucune instabilité n'apparaît, à déterminer la densité d'énergie homogénéisée E , définie par :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{U} \in \mathcal{U}_{ad} \text{ tel que :} \\ E(\mathbf{U}) = \min_{\mathbf{v}/(7), \mathbf{v}/(8)} \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \left(\int_Y e(\mathbf{y}, \mathbf{1} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{v}) dy \right) d\Omega \end{array} \right.$$

On montre aisément, en introduisant \mathbf{T} le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff macroscopique, \mathbf{F} le tenseur gradient de déformation macroscopique, \mathbf{U} le champ de déplacement macroscopique et $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{f} et \mathbf{u} leurs homologues microscopiques, que le problème (10) peut être interprété sous les formes décrites ci-dessous :

Problème macroscopique

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{T} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{x}, \mathbf{F}) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{U} = \mathcal{U} & \text{sur } \partial\Omega_u \\ \mathbf{T}(\mathbf{N}) = \mathbf{g} & \text{sur } \partial\Omega_g \end{array} \right.$$

où $\operatorname{div}_{\mathbf{x}}$ et $\nabla_{\mathbf{x}}$ sont les opérateurs divergence et gradient par rapport aux variables d'espace macroscopiques x_1, x_2, x_3 et \mathbf{N} la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega_g$;

Problème microscopique

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) & \text{dans } Y \\ \mathbf{f} = \mathbf{F} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} & \text{dans } Y \\ \mathbf{u} & Y \text{ périodique} \\ \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) & Y \text{ anti-périodique} \end{array} \right.$$

où l'on note par $\operatorname{div}_{\mathbf{y}}$ et $\nabla_{\mathbf{y}}$ les opérateurs divergence et gradient par rapport aux variables d'espace microscopiques y_1, y_2, y_3 et par \mathbf{n} la normale unitaire

extérieure à ∂Y (la densité d'énergie e est connue puisqu'elle définit les différents constituants de la cellule de base Y).

Densité d'énergie macroscopique

Enfin la densité d'énergie E du matériau homogène équivalent est donnée par les relations suivantes de couplage entre quantités microscopiques et macroscopiques (on suppose que le milieu ne comporte aucune cavité ou défaut) :

$$(13) \quad \begin{cases} E = \langle e \rangle_Y \\ \mathbf{T} = \langle \boldsymbol{\tau} \rangle_Y \\ \mathbf{F} = \langle \mathbf{f} \rangle_Y \end{cases}$$

$$\text{avec } \langle h \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_Y h dy$$

On constate rapidement à l'examen des problèmes (11), (12) et (13) que d'une part il s'agit de problèmes non linéaires et que d'autre part le problème macroscopique (11) ne peut être résolu qu'une fois la densité E connue. Pour ce faire il est nécessaire d'utiliser les relations (13), ce qui fait clairement apparaître le couplage entre les niveaux microscopique et macroscopique.

Le paragraphe suivant présente un algorithme permettant résoudre économiquement ces problèmes non linéaires couplés.

3 Algorithme non incrémental

On se propose ici de résoudre les problèmes non linéaires (11), (12) et (13) par l'utilisation d'une méthode non incrémentale de résolution, initialement développée pour l'étude de structures élasto-plastiques (Boisse, 1987 [5]; Cognard, 1989 [11]; Ladevèze, 1996 [18]). Cette méthode consiste, contrairement aux méthodes classiques où l'on recherche soit les champs de déplacements (\mathbf{U}, \mathbf{u}) , soit les champs de contraintes $(\mathbf{T}, \boldsymbol{\tau})$, à rechercher simultanément l'ensemble des variables par l'intermédiaire des quadruplets $S = ((\mathbf{T}, \mathbf{U}); (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}))$.

3.1 Principe de la méthode

Le principe de cette méthode repose sur la décomposition des équations des problèmes à résoudre en deux groupes correspondant à une séparation des difficultés, à savoir non linéarité (par exemple comportement) et globalité en espace (par exemple équilibre).

Le premier groupe, noté \mathcal{NL} , est constitué de l'ensemble des équations du problème considéré, éventuellement non linéaires, mais locales en espace. Dans notre méthode, les approximations intermédiaires notées $S^{n+\frac{1}{2}}$ ($n \in \mathbb{N}$) satisfont les équations de \mathcal{NL} . Le deuxième groupe, noté \mathcal{L} , est constitué des équations linéaires posées localement ou globalement en espace. Les équations de \mathcal{L} seront satisfaites par des approximations intermédiaires notées S^{n+1} ($n \in \mathbb{N}$). Par la suite on dira abusivement que $S^{n+\frac{1}{2}}$ appartient à \mathcal{NL} ou que S^{n+1} appartient à \mathcal{L} , lorsque les champs qui les constituent satisfont les équations de \mathcal{NL} ou \mathcal{L} .

Evidemment, la solution S recherchée satisfait les équations des deux groupes \mathcal{NL} et \mathcal{L} .

La recherche de cette solution est réalisée par l'enchaînement de deux étapes successives. L'algorithme est tout d'abord initialisé par une approximation notée S^0 , choisie arbitrairement, mais satisfaisant les équations du groupe \mathcal{L} . Le choix de deux opérateurs notés H^+ et H^- permet ensuite de passer alternativement de \mathcal{L} à \mathcal{NL} , selon un processus itératif défini comme suit :

- une approximation intermédiaire, par exemple d'ordre n , S^n , de \mathcal{L} , étant supposée connue, on construit à l'aide de l'opérateur de "montée" H^+ , une approximation que l'on espère meilleure, notée $S^{n+\frac{1}{2}}$, appartenant à \mathcal{NL} , de sorte que :

$$(14) \quad S^{n+\frac{1}{2}} = H^+(S^n)$$

- une fois l'approximation $S^{n+\frac{1}{2}}$ déterminée, on construit une approximation intermédiaire S^{n+1} , satisfaisant les équations du groupe \mathcal{L} , grâce à l'opérateur de "descente" H^- , de sorte que :

$$(15) \quad S^{n+1} = H^-\left(S^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

Le choix des opérateurs H^+ et H^- est dicté par le choix retenu des groupes \mathcal{L} et \mathcal{NL} . D'autre part, afin de garantir l'obtention de gains en temps de calcul

importants, ils doivent être de mise en œuvre simple et de fonctionnement économique.

3.2 Choix des groupes \mathcal{L} et \mathcal{NL}

Les problèmes (11), (12) et (13) à résoudre comportent des équations linéaires globales en espace (équilibre) et d'autres linéaires et non linéaires posées localement en espace (lois de comportement) à savoir :

$$(16) \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) \quad \text{dans } Y$$

$$(17) \quad \begin{cases} \mathbf{T} = \langle \boldsymbol{\tau} \rangle_Y & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F} = \langle \mathbf{f} \rangle_Y & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{U} = \mathcal{U} & \text{sur } \partial\Omega_u \\ \mathbf{f} = \mathbf{F} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} & \text{dans } Y \\ \mathbf{u} & Y \text{ périodique} \end{cases}$$

Ainsi les définitions des deux groupes \mathcal{NL} et \mathcal{L} que nous avons retenues sont les suivantes :

$$(18) \quad \mathcal{NL} = \left\{ ((\mathbf{T}, \mathbf{U}) ; (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u})) \text{ vérifiant (17)} / \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}} \text{ dans } Y \right\}$$

$$(19) \quad \mathcal{L} = \left\{ ((\mathbf{T}, \mathbf{U}) ; (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u})) \text{ vérifiant (17)} / \begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{T} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T}(\mathbf{N}) = \mathbf{g} & \text{sur } \partial\Omega_g \\ \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) \text{ } Y \text{ anti - périodique} \end{cases} \right\}$$

Cette décomposition suppose que les conditions aux limites macroscopiques respectent l'hypothèse de charges mortes, ou plus généralement que ces conditions aux limites sont linéaires.

Il apparaît clairement que l'ensemble des équations constitutives du groupe \mathcal{L} sont toutes linéaires, alors que parmi les équations constitutives de \mathcal{NL} , la loi de comportement (16) est non linéaire. La raison pour laquelle les équations (17) sont insérées dans le groupe \mathcal{NL} provient de ce qu'elles sont nécessaires pour l'obtention d'approximations, comme nous le verrons par la suite.

3.3 Initialisation

La première étape de l'algorithme consiste à définir une approximation S^0 , n'engendrant pas de coûts de calcul importants et satisfaisant les équations du groupe \mathcal{L} .

A cet effet, le moyen le plus simple et le plus facile à mettre en œuvre du fait de l'absence de loi de comportement dans le groupe \mathcal{L} , consiste à choisir un comportement élastique linéaire.

L'approximation initiale est ainsi déterminée en développant au premier ordre la loi de comportement microscopique au voisinage de $\mathbf{f} = \mathbf{F} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}$, $\mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}$, de sorte que l'on obtient une loi de comportement de type :

$$(20) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{q}^0(\mathbf{y}) (\mathbf{f} - \mathbf{1}) \\ \text{avec } \mathbf{q}^0(\mathbf{y}) &= \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f} = \mathbf{1}) \end{aligned}$$

Ainsi pour trouver les champs macroscopiques de l'approximation initiale S^0 , il faut résoudre :

$$(21) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{T}^0 = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T}^0 = \mathbf{Q}^0 (\mathbf{F}^0 - \mathbf{1}) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F}^0 = \mathbf{1} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{U}^0 = \mathcal{U} & \text{sur } \partial\Omega_u \\ \mathbf{T}^0(\mathbf{N}) = \mathbf{g} & \text{sur } \partial\Omega_g \end{cases}$$

où le tenseur de raideur homogénéisé \mathbf{Q}^0 est défini par :

$$(22) \quad \begin{cases} \mathbf{T}^0 = \langle \boldsymbol{\tau}^0 \rangle_Y \\ \mathbf{F}^0 = \langle \mathbf{f}^0 \rangle_Y \end{cases}$$

alors que $\boldsymbol{\tau}^0$ et \mathbf{u}^0 sont obtenus après résolution de :

$$(23) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\tau}^0 = \mathbf{0} & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\tau}^0 = \mathbf{q}^0(\mathbf{y}) (\mathbf{f}^0 - \mathbf{1}) & \text{dans } Y \\ \mathbf{f}^0 = \mathbf{F}^0 + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^0 & \text{dans } Y \\ \mathbf{u}^0 & Y \text{ périodique} \\ \boldsymbol{\tau}^0(\mathbf{n}) & Y \text{ anti-périodique} \end{cases}$$

Cette étape d'initialisation consiste ainsi à homogénéiser, dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations, le composite considéré. On constate aisément que les problèmes à résoudre (21), (22) et (23) sont des problèmes linéaires couplés, mais dont la résolution ne pose pas la moindre difficulté, puisqu'elle peut être obtenue très simplement par mise en œuvre d'une méthode éléments finis, si la géométrie de la période de base Y le requiert.

3.4 Itérations successives

Connaissant l'approximation initiale S^0 , permettant d'amorcer le processus de résolution, il s'agit ensuite de déterminer une approximation intermédiaire S^{n+1} , à partir de l'approximation précédente S^n .

3.4.1 Etape $n + \frac{1}{2}$: Transport de \mathcal{L} dans \mathcal{NL}

La première étape de cette recherche consiste à définir tout d'abord l'opérateur de "montée" H^+ , permettant de définir l'itérée $S^{n+\frac{1}{2}}$ appartenant à \mathcal{NL} .

Les équations de \mathcal{NL} sont, par définition, constituées d'équations locales en espace. L'opérateur H^+ choisi doit permettre de conserver ce caractère.

L'opérateur que nous avons choisi est défini par :

$$(24) \quad \begin{aligned} H^+ : [L^2(Y)]^9 &\rightarrow [L^2(Y)]^9 \\ \mathbf{f}^n &\rightarrow \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}^n \end{aligned}$$

de sorte que l'approximation intermédiaire $S^{n+\frac{1}{2}}$ est définie par :

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{T}^{n+\frac{1}{2}} = \left\langle \boldsymbol{\tau}^{n+\frac{1}{2}} \right\rangle_Y & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} = \left\langle \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} \right\rangle_Y & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}} / \nabla_x \mathbf{U}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{1} \text{ dans } \Omega ; \mathbf{U} = \mathcal{U} \text{ sur } \partial\Omega_u & \\ \boldsymbol{\tau}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}}) & \text{dans } Y \\ \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}^n & \text{dans } Y \\ \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} / \nabla_y \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}^{n+\frac{1}{2}} \text{ dans } Y ; \mathbf{u}^{n+\frac{1}{2}} \text{ } Y \text{ périodique} & \end{array} \right.$$

Ce choix d'opérateur permet une détermination simple et rapide de l'approximation intermédiaire $S^{n+\frac{1}{2}}$.

3.4.2 Etape $n + 1$: Transport de \mathcal{NL} dans \mathcal{L}

Le calcul de S^{n+1} nécessite la définition de l'opérateur de "descente" H^- . Cette solution intermédiaire S^{n+1} doit appartenir à \mathcal{L} . Elle doit donc satisfaire les équations d'équilibre, les relations de couplage et les conditions aux limites. Par contre aucune loi de comportement n'est imposée pour relier les contraintes aux déformations. On utilise alors cette liberté en choisissant un opérateur H^- permettant de conserver le caractère linéaire des équations du groupe \mathcal{L} .

Parmi les opérateurs susceptibles de satisfaire ce critère, celui qui est de mise en œuvre aisée, garantissant ainsi l'obtention de coûts de calcul minima, est une linéarisation de la loi de comportement. Ainsi nous avons retenu pour opérateur H^- , celui induit par une linéarisation de $\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}$ en $S^{n+\frac{1}{2}}$, donc l'opérateur défini par :

$$(26) \quad \begin{aligned} H^- : \quad B &\rightarrow B \\ (\boldsymbol{\tau}^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}}) &\rightarrow (\boldsymbol{\tau}^{n+1}, \mathbf{f}^{n+1}) \\ \text{tel que } \boldsymbol{\tau}^{n+1} &= \boldsymbol{\tau}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}} \left(\mathbf{y}, \mathbf{f} = \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} \right) (\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

avec $B = \left\{ (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{f}) / \boldsymbol{\tau} \in [L^2(Y)]^9, \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\tau} \in [L^2(Y)]^3, \mathbf{f} \in [L^2(Y)]^9 \right\}$

Ainsi pour déterminer les champs macroscopiques de S^{n+1} , il faut résoudre le problème suivant :

$$(27) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T}^{n+1} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{F}} (\mathbf{x}, \mathbf{F}^{n+1}) & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{F}^{n+1} = \mathbf{1} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^{n+1} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{U}^{n+1} = \mathcal{U} & \text{sur } \partial\Omega_u \\ \mathbf{T}^{n+1}(\mathbf{N}) = \mathbf{g} & \text{sur } \partial\Omega_g \end{cases}$$

où la densité d'énergie macroscopique E est définie par :

$$(28) \quad \begin{cases} \mathbf{T}^{n+1} = \langle \boldsymbol{\tau}^{n+1} \rangle_Y \\ \mathbf{F}^{n+1} = \langle \mathbf{f}^{n+1} \rangle_Y \end{cases}$$

avec $\boldsymbol{\tau}^{n+1}$ et \mathbf{f}^{n+1} solutions de :

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \mathbf{0} & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \boldsymbol{\tau}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}} \left(\mathbf{y}, \mathbf{f} = \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} \right) \left(\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} \right) & \text{dans } Y \\ \mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{F}^{n+1} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^{n+1} & \text{dans } Y \\ \mathbf{u}^{n+1} & Y \text{ périodique} \\ \boldsymbol{\tau}^{n+1}(\mathbf{n}) & Y \text{ anti - périodique} \end{array} \right.$$

En remarquant que :

$$(30) \quad \mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{1} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^{n+1} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^{n+1}$$

de sorte que la loi de comportement peut être formulée sous la forme suivante :

$$(31) \quad \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \left(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^{n+1} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^{n+1} \right)$$

où les tenseurs de raideurs locales $\mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}}$ et de précontraintes locales $\mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}}$ sont donnés par :

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}} \left(\mathbf{y}, \mathbf{f} = \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ \mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}} = \boldsymbol{\tau}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \left(\mathbf{1} - \mathbf{f}^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{array} \right.$$

le problème (29) peut être reformulé sous la forme :

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \mathbf{0} & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \left(\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^{n+1} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^{n+1} \right) & \text{dans } Y \\ \mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{F}^{n+1} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^{n+1} & \text{dans } Y \\ \mathbf{u}^{n+1} & Y \text{ périodique} \\ \boldsymbol{\tau}^{n+1}(\mathbf{n}) & Y \text{ anti - périodique} \end{array} \right.$$

Ce problème étant linéaire par rapport aux variables $\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^{n+1}$ et $\mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}}$, en utilisant le principe de superposition, on montre simplement que les champs solutions peuvent être décomposés de la façon suivante :

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{v}^{n+1} - \boldsymbol{\chi}^{kl} \frac{\partial \mathbf{U}^k}{\partial x_l} \\ \boldsymbol{\tau}^{n+1} = \mathbf{s}^{n+1} + \boldsymbol{\sigma}^{kl} \frac{\partial \mathbf{U}^k}{\partial x_l} \end{array} \right.$$

où les dix couples $(\mathbf{s}^{n+1}, \mathbf{v}^{n+1})$ et $(\boldsymbol{\sigma}^{kl}, \boldsymbol{\chi}^{kl})$ $((k, l) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\})$ sont respectivement solutions de :

$$(35) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \mathbf{t}^{n+1} = \mathbf{0} & \text{dans } Y \\ \mathbf{t}^{n+1} = \mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{v}^{n+1} & \text{dans } Y \\ \mathbf{v}^{n+1} & Y \text{ périodique} \\ \mathbf{t}^{n+1}(\mathbf{n}) & Y \text{ anti - périodique} \end{cases}$$

$$(36) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\sigma}^{kl} = \mathbf{0} & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\sigma}^{kl} = \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{1}^{kl} - \nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\chi}^{kl}) & \text{dans } Y \\ \boldsymbol{\chi}^{kl} & Y \text{ périodique} \\ \boldsymbol{\sigma}^{kl}(\mathbf{n}) & Y \text{ anti - périodique} \end{cases}$$

Ces problèmes sont indépendants des quantités macroscopiques et peuvent donc être résolus directement.

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_9 et les hypothèses supplémentaires :*

- $\mathcal{H}_{10} : \forall \mathbf{z} \in Z^3, \forall \mathbf{f} \in [L^2(Y)]^9, \forall \mathbf{y} \in Y, \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y} + \mathbf{z}, \mathbf{f}) = \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f})$
- $\mathcal{H}_{11} : \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in [L^2(Y)]^9, \operatorname{tr} \left(\frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) \mathbf{A} \right) \mathbf{B}^t = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \left(\frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) \mathbf{B} \right)^t$
- $\mathcal{H}_{12} : \exists C > 0, \forall \mathbf{A} \in [L^2(Y)]^9, \left\| \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) \mathbf{A} \right\|_Y \leq C \|\mathbf{A}\|_Y$

$$\text{où } \|\mathbf{A}\|_Y^2 = \sum_{i=1, j=1}^3 \|A_{ij}\|_{L^2(Y)}^2$$

- $\mathcal{H}_{13} : \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f})$ est un tenseur coercif d'ordre 4,

$$c'est \text{ à dire } \exists M > 0 \text{ tel que } \forall \mathbf{A} \in [L^2(Y)]^9, \mathbf{A}^t \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) \mathbf{A} \geq M \mathbf{A}^t \mathbf{A}$$

Alors les problèmes (35) et (36) admettent une unique solution.

Preuve. Pour la démonstration de ce résultat, nous renvoyons le lecteur à Geymonat *et al.* (1993 [17]) □

Une fois les problème (35) et (36) résolus, il est possible de calculer les champs macroscopiques \mathbf{T}^{n+1} et \mathbf{U}^{n+1} en utilisant les relations de couplage (28), qui définissent la densité d'énergie macroscopique E . On obtient ainsi :

$$(37) \quad \begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{T} = \mathbf{0} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{T} = \mathbf{P}^{n+1} + \mathbf{Q}^{n+1} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^{n+1} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{U}^{n+1} = \mathcal{U} & \text{sur } \partial\Omega_u \\ \mathbf{T}^{n+1}(\mathbf{N}) = \mathbf{g} & \text{sur } \partial\Omega_g \end{cases}$$

avec

$$(38) \quad \begin{cases} \mathbf{Q}_{ijkl}^{n+1} = \langle \sigma_{ij}^{kl} \rangle_Y \\ \mathbf{P}_{ij}^{n+1} = \langle t_{ij}^{n+1} \rangle_Y \end{cases}$$

Théorème 3.2 *Sous les hypothèses suivantes :*

- le tenseur \mathbf{Q}^{n+1} est coercif.
- $\partial\Omega_u \neq \emptyset$.

Le problème (37) admet une unique solution.

Preuve. Pour la démonstration de ce résultat, nous renvoyons le lecteur à Duvaut (1990 [16]) \square

La connaissance des champs macroscopiques permet grâce à (34) de déterminer explicitement les champs microscopiques. Ce qui nous permet dès lors de connaître l'ensemble des quantités à l'itération $n + 1$.

3.5 Critère de convergence

Une fois les étapes précédentes réalisées, la connaissance des champs d'ordre $n + 1$ est assurée. Ce processus d'itérations successives de \mathcal{L} vers \mathcal{NL} puis de \mathcal{NL} vers \mathcal{L} est répété jusqu'à ce que la convergence soit atteinte. Nous avons choisi un critère de convergence basé sur les quantités "énergétiques" suivantes :

$$(39) \quad \begin{cases} \mathcal{E}_{micro}^{n+1} = \frac{\|\boldsymbol{\tau}^{n+1} : \mathbf{f}^{n+1} - \boldsymbol{\tau}^n : \mathbf{f}^n\|_Y}{\|\boldsymbol{\tau}^n : \mathbf{f}^n\|_Y} \\ \mathcal{E}_{macro}^{n+1} = \frac{\|\mathbf{T}^{n+1} : \mathbf{F}^{n+1} - \mathbf{T}^n : \mathbf{F}^n\|_\Omega}{\|\mathbf{T}^n : \mathbf{F}^n\|_\Omega} \\ \text{taux}^{n+1} = \sup(\mathcal{E}_{micro}^{n+1}, \mathcal{E}_{macro}^{n+1}) \end{cases}$$

où $\| \bullet \|_Y = \int_Y |\bullet| dy$ et $\| \bullet \|_\Omega = \int_\Omega |\bullet| dx$.

Le critère de convergence est défini par :

$$(40) \quad \text{taux}^{n+1} < \epsilon$$

où ϵ est le seuil de précision choisi.

3.6 Discrétisation du problème à l'étape $n + 1$

Afin de résoudre le problème type de l'algorithme précédemment décrit, nous commençons par en établir la formulation variationnelle pour en déduire, par la suite, le système discrétisé à résoudre, par utilisation de la méthode des éléments finis.

Afin d'expliciter la formulation variationnelle de ce problème à une itération donnée, nous reprenons les problèmes (27), (28) et (29) et envisageons successivement les problèmes microscopiques et macroscopiques.

3.6.1 Formulation variationnelle du problème microscopique à l'étape $n + 1$

Soit u_{ad} l'espace des champs de déplacements microscopiques, cinématiquement admissibles pour le problème microscopique (29), défini par :

$$(41) \quad u_{ad} = \left\{ \mathbf{v} \in [H^1(Y)]^3 / \mathbf{v} \text{ Y - périodique} \right\}$$

Soient $(\boldsymbol{\tau}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})$ la solution de (29) et $(\mathbf{T}^{n+1}, \mathbf{U}^{n+1})$ celle supposée connue de (27). On a alors classiquement (puisque $\boldsymbol{\tau}^{n+1}(\mathbf{n})$ et \mathbf{v} sont respectivement Y anti-périodique et Y-périodique)

$$(42) \quad \begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} \in u_{ad} \\ a^{n+1}(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) = l^{n+1}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in u_{ad} \end{cases}$$

avec

$$(43) \quad \begin{cases} a^{n+1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_Y \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{v} dy \\ l^{n+1}(\mathbf{v}) = - \int_Y \left(\mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^{n+1} \right) \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{v} dy \end{cases}$$

3.6.2 Formulation variationnelle du problème macroscopique à l'étape $n + 1$

Le problème macroscopique permettant de déterminer complètement la forme linéaire $l^{n+1}(\mathbf{v})$ est le problème (27), où la densité d'énergie E est définie grâce à (28). Soit \mathcal{U}_{ad} l'espace des champs de déplacements macroscopiques, cinématiquement admissibles pour ce problème, défini par :

$$(44) \quad \mathcal{U}_{ad} = \left\{ \mathbf{V} \in [H^1(\Omega)]^3 / \mathbf{V} = \mathcal{U} \text{ sur } \partial\Omega_u \right\}$$

Alors $\mathbf{U}^{n+1} \in \mathcal{U}_{ad}$.

En introduisant l'espace vectoriel, noté \mathcal{U}_{ad}^0 , associé à \mathcal{U}_{ad} , défini par

$$(45) \quad \mathcal{U}_{ad}^0 = \left\{ \mathbf{V} \in [H_0^1(\Omega)]^3 / \mathbf{V} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \right\}$$

on obtient alors classiquement en utilisant les conditions aux limites de (27)

$$\int_{\Omega} \mathbf{T}^{n+1} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V} dx = \int_{\partial\Omega_g} \mathbf{g} \mathbf{V} dx \quad \forall \mathbf{V} \in \mathcal{U}_{ad}^0$$

ou encore en utilisant les relations de couplage (28)

$$(46) \quad \begin{cases} \mathbf{U}^{n+1} \in \mathcal{U}_{ad} \\ A^{n+1}(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{V}) = L^{n+1}(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in \mathcal{U}_{ad}^0 \end{cases}$$

avec

$$(47) \quad \begin{cases} A^{n+1}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \left(\int_{\mathbf{Y}} \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} dy \right) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V} dx \\ L^{n+1}(\mathbf{V}) = \int_{\partial\Omega_g} \mathbf{g} \mathbf{V} dx \\ \quad - \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \left(\int_{\mathbf{Y}} \left(\mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^{n+1} \right) dy \right) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V} dx \end{cases}$$

Dès lors, la formulation variationnelle associée à (27), (28) et (29) est :

$$(48) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{U}^{n+1} \in \mathcal{U}_{ad}, \mathbf{u}^{n+1} \in u_{ad} \text{ tels que :} \\ a^{n+1}(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}) = l^{n+1}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in u_{ad} \\ A^{n+1}(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{V}) = L^{n+1}(\mathbf{V}), \quad \forall \mathbf{V} \in \mathcal{U}_{ad}^0 \end{cases}$$

avec $a^{n+1}(\bullet, \bullet)$ et $l^{n+1}(\bullet)$ définies par (43) et $A^{n+1}(\bullet, \bullet)$ et $L^{n+1}(\bullet)$ définies par (47).

3.6.3 Discrétisation du problème à l'étape $n + 1$

La résolution numérique de (48) est réalisée en approximant u_{ad} et \mathcal{U}_{ad} par des espaces de dimension finie. Ces approximations sont classiquement réalisées par utilisation de la méthode des éléments finis (Ciarlet, 1978 [10]; Dhatt, Touzot, 1981 [12]). Ainsi, en substituant aux espaces u_{ad} , \mathcal{U}_{ad} et \mathcal{U}_{ad}^0 , les sous-espaces de dimension finie u_{ad}^h , \mathcal{U}_{ad}^h et $\mathcal{U}_{ad}^{0,h}$ de dimensions respectives n_h et N_h , on obtient la forme discrétisée du problème (48), définie par :

$$(49) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{U}^{n+1,h} \in \mathcal{U}_{ad}^h, \mathbf{u}^{n+1,h} \in u_{ad}^h \text{ tels que :} \\ a^{n+1}(\mathbf{u}^{n+1,h}, \mathbf{v}) = l^{n+1}(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in u_{ad}^h \\ A^{n+1}(\mathbf{U}^{n+1,h}, \mathbf{V}) = L^{n+1}(\mathbf{V}), \forall \mathbf{V} \in \mathcal{U}_{ad}^{0,h} \end{cases}$$

ou encore en choisissant pour \mathbf{V} et \mathbf{v} les vecteurs de base Φ^i et Ψ^i de \mathbb{R}^{N_h} et \mathbb{R}^{n_h}

$$(50) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{U}^{n+1,h} \in \mathcal{U}_{ad}^h, \mathbf{u}^{n+1,h} \in u_{ad}^h \text{ tels que :} \\ a^{n+1}(\mathbf{u}^{n+1,h}, \Psi^i) = l^{n+1}(\Psi^i), \forall i = 1, \dots, n_h \\ A^{n+1}(\mathbf{U}^{n+1,h}, \Phi^i) = L^{n+1}(\Phi^i), \forall i = 1, \dots, N_h \end{cases}$$

4 Convergence de l'algorithme

Afin de démontrer la convergence de l'algorithme précédent, nous allons, dans un premier temps, établir la formulation variationnelle du problème (11), (12) et (13), à résoudre, puis en donner une formulation discrète. Dans un deuxième temps, nous montrerons que la méthode de résolution proposée appliquée au problème discrétisé, avec le choix des espaces \mathcal{L} et \mathcal{NL} ainsi que des fonctions H^+ et H^- , équivaut à une méthode de Newton, ce qui nous permettra alors de conclure quant à la convergence de l'algorithme proposé.

4.1 Formulation variationnelle du problème non linéaire

On cherche $((\mathbf{T}, \mathbf{U}); (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}))$ solution de (11), (12) et (13). Afin d'expliciter la formulation variationnelle de ce problème, envisageons successivement les problèmes microscopique et macroscopique.

4.1.1 Formulation variationnelle du problème non linéaire microscopique

Le problème microscopique à résoudre est le problème (12). L'espace des champs de déplacements microscopiques, cinématiquement admissibles est u_{ad} et a été défini en (41). Soient $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u})$ une solution de (12) et (\mathbf{T}, \mathbf{U}) une solution supposée connue de (11). On a alors classiquement (puisque $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n})$ est \mathbf{Y} anti-périodique) :

$$(51) \quad a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in u_{ad}$$

avec

$$(52) \quad a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathbf{Y}} \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f} = \mathbf{1} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}) \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{v} dy$$

et u_{ad} défini par (41).

4.1.2 Formulation variationnelle du problème non linéaire macroscopique

Le problème macroscopique à résoudre est le problème (11), où la densité d'énergie E est définie grâce à (13). L'espace des champs de déplacements cinématiquement admissibles pour ce problème, \mathcal{U}_{ad} , a été défini en (44). En introduisant l'espace vectoriel, noté \mathcal{U}_{ad}^0 et défini par (45), associé à \mathcal{U}_{ad} et en utilisant les conditions aux limites de (1.56) ainsi que la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V} dx = \int_{\partial \Omega_g} \mathbf{g} \mathbf{V} dS, \quad \forall \mathbf{V} \in \mathcal{U}_{ad}^0$$

ou encore en utilisant les relations de couplage (13) :

$$(53) \quad \begin{cases} \mathbf{U} \in \mathcal{U}_{ad} \\ A'(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = L'(\mathbf{V}), \quad \forall \mathbf{V} \in \mathcal{U}_{ad}^0 \end{cases}$$

avec

$$(54) \quad \begin{cases} A'(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \left(\int_{\mathbf{Y}} \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f} = \mathbf{1} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}) dy \right) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{V} dx \\ L'(\mathbf{V}) = \int_{\partial \Omega_g} \mathbf{g} \mathbf{V} dS \end{cases}$$

Dès lors, la formulation variationnelle associée à (11), (12) et (13) est :

$$(55) \quad \begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{U} \in \mathcal{U}_{ad}, \mathbf{u} \in u_{ad} \text{ tels que :} \\ & \begin{cases} a'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 & , \forall \mathbf{v} \in u_{ad} \\ A'(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = L'(\mathbf{V}) & , \forall \mathbf{V} \in \mathcal{U}_{ad}^0 \end{cases} \\ & \text{avec } a'(\bullet, \bullet), \text{ définie par (52), } A'(\bullet, \bullet), L'(\bullet) \text{ définies par (54)} \end{aligned}$$

4.1.3 Discrétisation du problème non linéaire

La discrétisation du problème (55) est réalisée en utilisant la même méthode que précédemment (paragraphe 3.6.3). On obtient alors le problème discret suivant :

$$(56) \quad \begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{U}^h \in \mathcal{U}_{ad}^h, \mathbf{u}^h \in u_{ad}^h \text{ tels que :} \\ & \begin{cases} A'(\mathbf{U}^h, \mathbf{\Phi}^i) - L'(\mathbf{\Phi}^i) = 0 & , \forall i = 1, \dots, N_h \\ a'(\mathbf{u}^h, \mathbf{\Psi}^i) = 0 & , \forall i = 1, \dots, n_h \end{cases} \end{aligned}$$

Notons par $\mathbf{F}(\mathbf{U}^h, \mathbf{u}^h)$ le vecteur de $\mathbb{R}^{N_h+n_h}$ dont les composantes sont définies par :

$$(57) \quad \begin{cases} F_i(\mathbf{U}^h, \mathbf{u}^h) = a'(\mathbf{u}^h, \mathbf{\Psi}^i) & , \forall i = 1, \dots, n_h \\ F_i(\mathbf{U}^h, \mathbf{u}^h) = A'(\mathbf{U}^h, \mathbf{\Phi}^{i-n_h}) - L'(\mathbf{\Phi}^{i-n_h}) & , \forall i = 1 + n_h, \dots, n_h + N_h \end{cases}$$

Le problème non linéaire discrétisé consiste alors à :

$$(58) \quad \begin{aligned} & \text{Trouver } \mathbf{U}^h \in \mathcal{U}_{ad}^h, \mathbf{u}^h \in u_{ad}^h \text{ tels que :} \\ & F_i(\mathbf{U}^h, \mathbf{u}^h) = 0, \forall i = 1, \dots, N_h + n_h \end{aligned}$$

Comme nous allons le montrer au cours du paragraphe suivant, l'algorithme de résolution proposé ici consiste à mettre en œuvre une méthode de Newton pour la résolution de (11), (12) et (13).

4.2 Méthode de Newton

Pour résoudre le problème non linéaire de dimension finie (58), mettons en œuvre une méthode de Newton. Rappelons à cet effet le principe de la

méthode de Newton. Par souci de clarté, nous omettons les exposants h , bien que le problème demeure posé dans les espaces discrets u_{ad}^h et \mathcal{U}_{ad}^h .

i) Connaissant une approximation $(\mathbf{U}^n, \mathbf{u}^n)$, on calcule $(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})$ définie par :

$$(59) \quad (\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) = (\mathbf{U}^n, \mathbf{u}^n) + (\mathbf{W}^n, \mathbf{w}^n)$$

Par linéarisation, on a ensuite le développement à l'ordre 1 suivant :

$$(60) \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) = \mathbf{F}(\mathbf{U}^n, \mathbf{u}^n) + \mathbf{J}(\mathbf{U}^n, \mathbf{u}^n)(\mathbf{W}^n, \mathbf{w}^n)$$

où $\mathbf{J}(\mathbf{U}^n, \mathbf{u}^n)(\mathbf{W}^n, \mathbf{w}^n)$ est le jacobien de \mathbf{F} en $(\mathbf{U}^n, \mathbf{u}^n)$ appliqué à $(\mathbf{W}^n, \mathbf{w}^n)$.

ii) Ainsi, si $(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1})$ est solution de (58), alors que $(\mathbf{U}^n, \mathbf{u}^n)$ n'en est qu'une approximation connue, alors :

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) = 0$$

et on calcule la correction $(\mathbf{W}^n, \mathbf{w}^n)$ de sorte qu'elle soit solution de :

$$(61) \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}^n, \mathbf{u}^n) + \mathbf{J}(\mathbf{U}^n, \mathbf{u}^n)(\mathbf{W}^n, \mathbf{w}^n) = 0$$

Explicitons ensuite la forme de $\mathbf{J}(\mathbf{U}^n, \mathbf{u}^n)(\mathbf{W}^n, \mathbf{w}^n)$

Lemme 4.1 Soit $\mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{U}) = \mathbf{1} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \left(\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) \right) (\mathbf{W}) &= \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{W} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) \right) (\mathbf{w}) &= \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w} \end{aligned}$$

Preuve. L'opérateur \mathbf{f} étant linéaire en \mathbf{U} et \mathbf{u} , on a trivialement :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{W}) = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{W} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{w}) = \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w}$$

de sorte qu'il vient finalement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \left(\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{f}} \right) (\mathbf{W}) &= \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{W}) = \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{W} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{f}} \right) (\mathbf{w}) &= \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{w}) = \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w} \end{aligned}$$

□

Théorème 4.1 *Le jacobien de \mathbf{F} en $(\mathbf{U}^n, \mathbf{u}^n)$ appliqué à $(\mathbf{W}^n, \mathbf{w}^n)$ est donné par :*

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}^n, \mathbf{u}^n)(\mathbf{W}^n, \mathbf{w}^n) = (\mathbf{A}_i^n)_{1 \leq i \leq n_h + N_h}$$

avec

$$\forall i / 1 \leq i \leq n_h$$

$$\mathbf{A}_i^n = \int_Y \mathbf{q}^n (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{W}^n + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w}^n) \nabla_{\mathbf{y}} \Psi^i dy$$

$$\forall i / n_h + 1 \leq i \leq n_h + N_h$$

$$\mathbf{A}_i^n = \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \left(\int_Y \mathbf{q}^n (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{W}^n + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w}^n) dy \right) \nabla_{\mathbf{x}} \Phi^i dx$$

$$\text{avec } \mathbf{q}^n = \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f} = \mathbf{1} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^n + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^n)$$

Preuve. On a par définition :

$$\begin{cases} F_i = \int_Y \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) \nabla_{\mathbf{y}} \Psi^i dy & 1 \leq i \leq n_h \\ F_i = \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \left(\int_Y \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) dy \right) \nabla_{\mathbf{x}} \Phi^{i-n_h} dx \\ \quad - \int_{\partial \Omega_g} \mathbf{g} \Phi^{i-n_h} dS & n_h + 1 \leq i \leq n_h + N_h \end{cases}$$

où pour alléger la démonstration, on a introduit la notation :

$$\frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) = \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f} = \mathbf{1} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^n + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^n)$$

Il vient alors :

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}^n, \mathbf{u}^n)(\mathbf{W}^n, \mathbf{w}^n) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{U}^n, \mathbf{u}^n)(\mathbf{W}^n) + \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{U}^n, \mathbf{u}^n)(\mathbf{w}^n) \right)_{1 \leq i \leq n_h + N_h}$$

Soit i tel que $1 \leq i \leq n_h$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{u}, \mathbf{U})(\mathbf{W}^n) &= \int_Y \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \left(\frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) \right) (\mathbf{W}^n) \nabla_{\mathbf{y}} \Psi^i dy \\
&= \int_Y \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{W}^n \nabla_{\mathbf{y}} \Psi^i dy
\end{aligned}$$

d'après le lemme 2.1.

Il vient de même :

$$\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{U})(\mathbf{w}^n) = \int_Y \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w}^n \nabla_{\mathbf{y}} \Psi^i dy$$

Soit i tel que, $1 + n_h \leq i \leq n_h + N_h$. Alors, de même, et en faisant l'hypothèse de charges mortes,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{u}, \mathbf{U})(\mathbf{W}^n) &= \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \left(\int_Y \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) dy \right) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{W}^n \nabla_{\mathbf{x}} \Phi^{i-n_h} dx \\
&= \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \left(\int_Y \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{W}^n dy \right) \nabla_{\mathbf{x}} \Phi^{i-n_h} dx \\
\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{U})(\mathbf{w}^n) &= \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \left(\int_Y \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}) \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w}^n dy \right) \nabla_{\mathbf{x}} \Phi^{i-n_h} dx
\end{aligned}$$

Ainsi, en effectuant pour toute valeur de i ($i \in \{1, \dots, n_h + N_h\}$) la somme des dérivées partielles $\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{U}}(\mathbf{u}, \mathbf{U})(\mathbf{W}^n)$ et $\frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{U})(\mathbf{w}^n)$, on obtient le résultat avancé. \square

Maintenant que le jacobien de \mathbf{F} est déterminé, exprimons le système (61) à résoudre. La méthode de Newton appliquée au problème (58) s'écrit sous ces

conditions sous la forme suivante :

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{W}^n \in \mathcal{U}_{ad}^h, \mathbf{w}^n \in u_{ad}^h \\ \forall i / \quad 1 \leq i \leq n_h \\ \quad \int_Y \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f} = \mathbf{f}^n) \nabla_{\mathbf{y}} \Psi^i dy \\ \quad + \int_Y \mathbf{q}^n (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{W}^n + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w}^n) \nabla_{\mathbf{y}} \Psi^i dy = 0 \\ \forall i / \quad 1 + n_h \leq i \leq n_h + N_h \\ \quad \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \left(\int_Y \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f} = \mathbf{f}^n) dy \right) \nabla_{\mathbf{x}} \Phi^{i-n_h} dx - \int_{\partial \Omega_g} \mathbf{g} \Phi^{i-n_h} dS \\ \quad + \int_{\Omega} \frac{1}{|Y|} \left(\int_Y \mathbf{q}^n(\mathbf{y}, \mathbf{f} = \mathbf{f}^n) (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{W}^n + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w}^n) dy \right) \nabla_{\mathbf{x}} \Phi^{i-n_h} dx = 0 \end{array} \right.$$

avec $\mathbf{f}^n = \mathbf{1} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^n + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^n$

Théorème 4.2 *Sous les hypothèses \mathcal{H}_1 à \mathcal{H}_{13} et dans la mesure où la solution initiale choisie est identique pour chacun des processus et que les méthodes d'éléments finis sont les mêmes, la méthode non incrémentale discrétisée (50) est équivalente à la méthode de Newton discrétisée (62).*

Preuve. Dans la mesure où d'après (2.11) et (2.19) :

$$\frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f} = \mathbf{f}^n) = \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}}$$

et en constatant que d'après (59) :

$$(\mathbf{W}^n, \mathbf{w}^n) = (\mathbf{U}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}) - (\mathbf{U}^n, \mathbf{u}^n)$$

c'est-à-dire :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{W}^n = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^{n+1} - \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^n \quad \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w}^n = \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^{n+1} - \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^n$$

de sorte que :

$$\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{W}^n + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w}^n = \mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n$$

La première équation du système (2.54), équivaut à :

$$\forall i / \quad 1 \leq i \leq n_h \\ \int_Y \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f} = \mathbf{f}^n) \nabla_{\mathbf{y}} \Psi^i dy + \int_Y \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n) \nabla_{\mathbf{y}} \Psi^i dy = 0$$

Or, puisque d'après (2.11) et (2.19) :

$$\mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f} = \mathbf{f}^n) + \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{1} - \mathbf{f}^n)$$

et dans la mesure où :

$$\mathbf{f}^{n+1} = \mathbf{1} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^{n+1} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^{n+1}$$

de sorte que :

$$\mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} (\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}^n) + \frac{\partial e}{\partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f} = \mathbf{f}^n) = \mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^{n+1} + \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^{n+1})$$

on a :

$$\forall i / \quad 1 \leq i \leq n_h \\ \int_Y \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}^{n+1} \nabla_{\mathbf{y}} \Psi^i dy + \int_Y \left(\mathbf{p}^{n+\frac{1}{2}} + \mathbf{q}^{n+\frac{1}{2}} \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{U}^{n+1} \right) \nabla_{\mathbf{y}} \Psi^i dy = 0$$

Ainsi, la première équation du système (2.54) est rigoureusement identique à celle du système (2.42). Il en est de même pour la seconde équation.

Dès lors dans la mesure où la solution initiale de ces processus itératifs de résolution est identique et puisque chacune des itérations est la même, alors ces deux méthodes sont équivalentes. \square

On peut alors finalement conclure que la méthode non incrémentale proposée est équivalente à la méthode de Newton, ceci ne valant que pour les choix retenus des opérateurs de passage H^+ et H^- .

4.3 Convergence

Afin de montrer la convergence de la méthode de résolution proposée, faisons les deux hypothèses suivantes :

- \mathcal{H}_{14} : $\exists \beta \in \mathbb{R}^+$ tel que $\left\| \left(\frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}} \right)^{-1} \right\| \leq \beta$

avec $\|\mathbf{q}\| = \max_{\|\mathbf{f}\|_{L^2(Y)}=1} \|\mathbf{q}\mathbf{f}\|_{[L^2(Y)]^9}$ et $\mathbf{q} = \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}$

et $\|\mathbf{f}\|_{[L^2(Y)]^9}^2 = \sum_{i=1, j=1}^3 \|f_{ij}\|_{L^2(Y)}^2$

- \mathcal{H}_{15} : L'opérateur $\frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}$ est lipschitzien, c'est à dire : $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\left\| \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}_1) - \frac{\partial^2 e}{\partial \mathbf{f} \partial \mathbf{f}}(\mathbf{y}, \mathbf{f}_2) \right\| \leq \alpha \|\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2\|_{[L^2(Y)]^9}$$

Ces hypothèses nous permettent alors d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 4.3 *Sous les hypothèses \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_{15} , la méthode non incrémentale discrétisée converge localement de façon quadratique.*

Preuve. Les hypothèses \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_{13} permettent d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution aux problèmes à résoudre.

Les hypothèses \mathcal{H}_{14} et \mathcal{H}_{15} permettent ensuite d'assurer la convergence quadratique locale (Dennis, Schnabel, 1983 [13]), puisque la méthode non incrémentale est équivalente à une méthode type Newton, sous les hypothèses \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_{15} . \square

En conclusion, la méthode proposée permet donc d'obtenir la solution du problème (11), (12) et (13) de façon non incrémentale et avec une convergence locale quadratique, sous les hypothèses \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_{15} .

4.4 Présentation du composite étudié

4.4.1 Discrétisation en espace

Comme nous venons de le voir, le calcul de la réponse d'une structure composite à constituants hyperélastiques pour une sollicitation donnée, nécessite la résolution de problèmes macroscopique et microscopique couplés qui peuvent générer des coûts de calculs importants.

Pour procéder à ces résolutions, il est nécessaire d'effectuer une discrétisation spatiale tant au niveau macroscopique que microscopique. Nous avons choisi, comme il est usuel de le faire en mécanique des milieux continus, une discrétisation par la méthode des éléments finis.

Si le chargement macroscopique est quelconque, les déformations induites ne seront pas constantes sur l'ensemble des éléments de la discrétisation macroscopique de la structure. Comme les problèmes microscopiques dépendent implicitement du tenseur gradient de déformation macroscopique, le calcul, à une itération donnée, de la matrice de raideur de chacun des éléments finis de la discrétisation macroscopique nécessitera la résolution de l'ensemble des problèmes cellulaires. Il sera ainsi nécessaire de résoudre à chaque itération un ensemble de problèmes microscopiques par élément fini de la discrétisation macroscopique.

En revanche, si l'on impose des chargements macroscopiques induisant un tenseur gradient de déformation macroscopique constant sur l'ensemble de la structure, alors l'obtention de la réponse de la structure ne nécessitera de résoudre qu'un seul ensemble de problèmes microscopiques à chaque itération, puisque le comportement homogène équivalent est le même sur l'ensemble de la structure.

Précisons que les codes ont été développés en utilisant la bibliothèque d'éléments finis *Modulef* [4].

Parmi les chargements macroscopiques qui induisent des tenseurs gradient de déformation macroscopique constants sur l'ensemble de la structure, rapportés à un repère (O, x_1, x_2, x_3) , (structure choisie ci-dessous de forme parallélépipédique $\{|x_1| \leq L_1, |x_2| \leq L_2, |x_3| \leq L_3\}$) nous avons choisi de considérer ceux répertoriés dans la table 1 :

Traction uni-axiale d'axe (O, x_i)	$\mathbf{U}_N = \pm U, \mathbf{T}_t = 0$ sur $ x_i = L_i$ $\mathbf{T}(\mathbf{n}) = 0$ sur le reste de $\partial\Omega$
Traction bi-axiale dans le plan (O, x_i, x_j)	$\mathbf{U}_N = \pm U_i, \mathbf{T}_t = 0$ sur $ x_i = L_i$ $\mathbf{U}_N = \pm U_j, \mathbf{T}_t = 0$ sur $ x_j = L_j$ $\mathbf{T}(\mathbf{n}) = 0$ sur le reste de $\partial\Omega$
Cisaillement simple dans le plan (O, x_i, x_j) d'axe (O, x_i)	$\begin{cases} \mathbf{U}_i = kx_j \\ \mathbf{U}_p = \mathbf{U}_q = 0 \end{cases}$ sur $ x_i = L_i$ et $ x_j = L_j$ où $p \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}; q \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i\} ; p \neq q$ $\mathbf{U}_N = 0, \mathbf{T}(\mathbf{n}) = 0$ sur le reste de $\partial\Omega$
Cisaillement pur dans le plan (O, x_i, x_j) d'axe (O, x_i)	$\mathbf{U}_n = U_i, \mathbf{T}_t = 0$ sur $ x_i = L_i$ $\mathbf{T}(\mathbf{n}) = 0$ sur $ x_j = L_j$ $\mathbf{U}_N = 0, \mathbf{T}(\mathbf{n}) = 0$ sur le reste de $\partial\Omega$

TAB. 1 – *Sollicitations macroscopiques étudiées*

$(\mathbf{T}(\mathbf{n}))$: vecteur contrainte; \mathbf{T}_t : composante tangentielle de $\mathbf{T}(\mathbf{n})$;
 \mathbf{U}_N : déplacement normal; \mathbf{n} : vecteur normal extérieur unitaire)

4.4.2 Géométrie et constitution mécanique de la cellule de base

Nous considérons un matériau composite dont les renforts, tous alignés dans la même direction et supposés de section circulaire, sont disposés aux sommets d'un réseau carré. Les constituants de ce composite sont supposés homogènes et isotropes. Leurs lois de comportement sont données ci-dessous :

- Matrice: Densité d'énergie de type Harth-Smith modifié, 1997 [19]

$$e(I_1, I_2, I_3) = E_1 \int_3^{I_1} e^{E_3(I_1-3)^2} dI_1 + \int_3^{I_2} \frac{E_2}{I_2^{E_4}} dI_2 + E_5 (I_3 - 1) - B \ln I_3$$

$$\text{avec} \begin{cases} \lambda = 4 \left(E_5 + \frac{E_2}{3E_4} \left(1 - 4\frac{E_4}{3} \right) \right) \\ \mu = 2 \left(E_1 + \frac{E_2}{3E_4} \right) \\ (\lambda, \mu : \text{coefficients de Lamé du matériau}) \\ B = E_1 + 2\frac{E_2}{3E_4} + E_5 \end{cases} \quad E_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, 5\}$$

où nous prenons $E_1 = 3 \cdot 10^5 \text{Pa}$, $E_2 = 10^6 \text{Pa}$, $E_3 = 0.03$,
 $E_4 = 0.63$, $E_5 = 5 \cdot 10^5 \text{Pa}$,
ce qui conduit à $E = 1.5 \cdot 10^6 \text{Pa}$, $\nu = 0.42$

– Fibre : Densité d'énergie de type Ciarlet-Geymonat, 1982 [9] :

$$e(I_1, I_2, I_3) = \frac{E_1}{2} (I_1 - 3) + \frac{E_2}{2} (I_2 - 3) + \frac{E_3}{2} (I_3 - 3) - B \ln I_3$$

$$\text{avec } \begin{cases} E_2 = \mu - E_1 \\ E_3 = \frac{\lambda}{2} - E_2 \\ (\lambda, \mu : \text{coefficients de Lamé du matériau}) \\ B = E_1 + 2E_2 + E_3 \end{cases} \quad E_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, 3\}$$

où nous prenons $E_1 = 1.16 \cdot 10^8 \text{Pa}$, $E = 1.10^9 \text{Pa}$, $\nu = 0.3$

Précisons que la géométrie de la période de base ainsi que l'isotropie de ses constituants conduisent à un comportement homogénéisé orthotrope.

4.5 Résultats

La figure 1 présente une comparaison des résultats obtenus pour les méthode incrémentale et non incrémentale. On constate directement que dans la mesure où le nombre d'itérations pour la méthode incrémentale est grand ces deux méthodes fournissent les mêmes résultats.

La figure 2 donne les temps d'exécution de notre méthode pour les différents chargements de la table 1 en comparaison du temps d'exécution de la méthode incrémentale de référence. Il faut noter que cette méthode est indépendante du chargement.

On peut constater sur cet histogramme que la méthode non incrémentale est beaucoup plus performante que la méthode incrémentale, puisqu'elle permet de réduire les temps de calcul de 70 % à 95 %.

Remarquons que dans le cas du cisaillement simple les gains sont moins importants. Dans ce cas de chargement, contrairement aux autres cas, le tenseur gradient de déformation macroscopique est non diagonal. Ceci a pour conséquence d'affecter les performances de la méthode en générant une perte de la convergence quadratique de la méthode comme nous le montre la figure 3.

Enfin, afin de visualiser l'influence de la solution initiale sur les performances de la méthode nous avons sur la figure 4 représenté les variations du

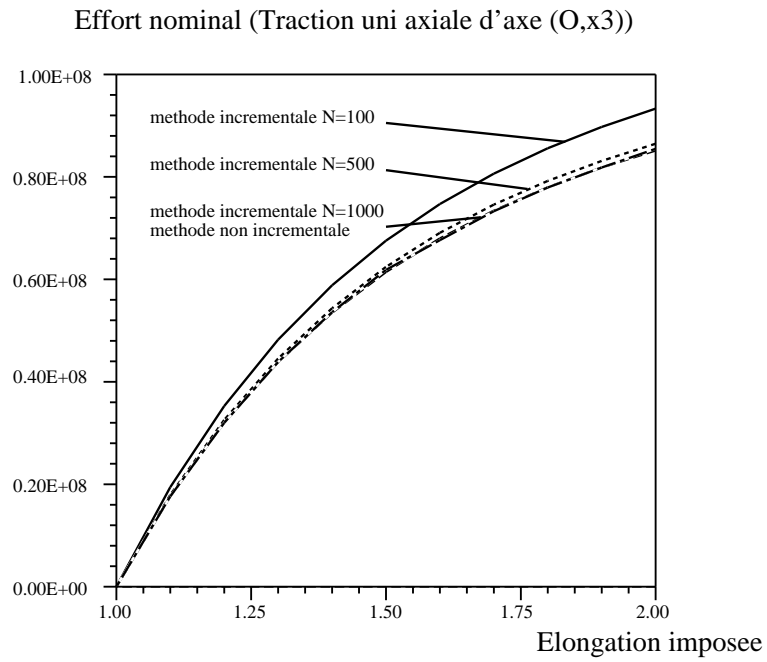


FIG. 1 – Comparaison des résultats entre méthode incrémentale et non incrémentale.

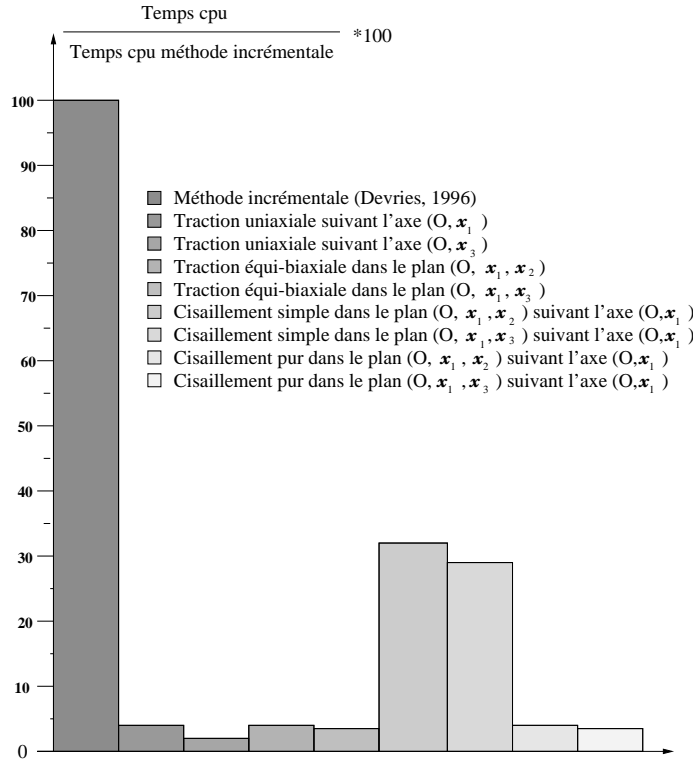


FIG. 2 – Comparaison des temps CPU entre méthode incrémentale et non incrémentale.

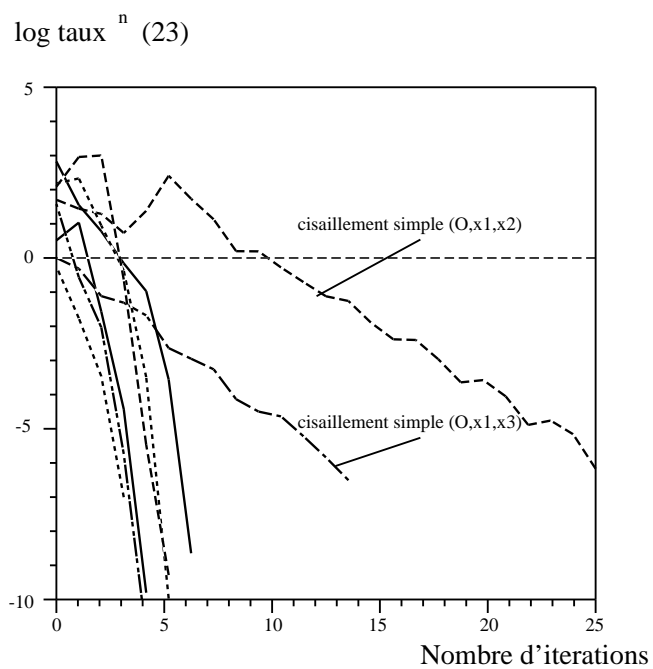


FIG. 3 – étude des taux de convergence en fonction de différents cas de chargement.

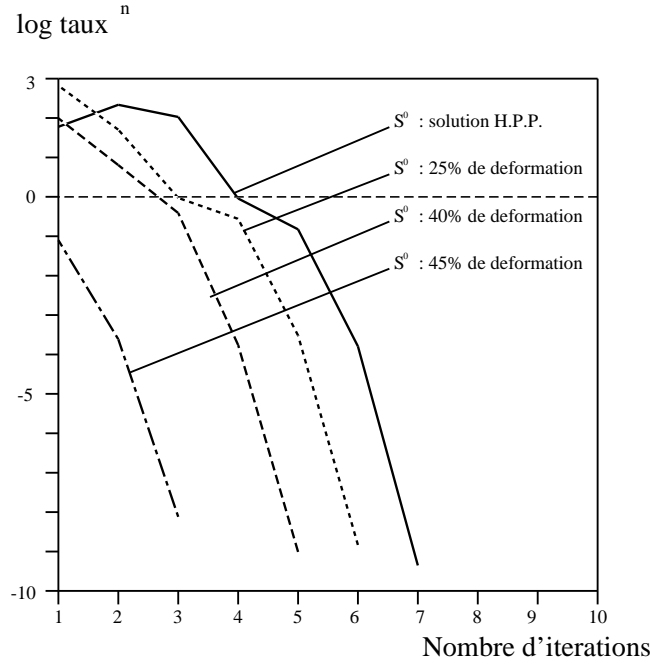


FIG. 4 – *Influence de la solution initiale sur le taux de convergence.*

taux de convergence dans un cas de traction uni axiale suivant la direction (O, x_1) en fonction du nombre d'itérations pour différentes solutions initiales. Ces solutions initiales ne sont plus nécessairement la solution du problème en hypothèse des petites perturbations (H.P.P.) mais éventuellement la solution d'un problème résolu précédemment à une autre déformation imposée. On constate une très nette influence de la solution initiale sur la rapidité de convergence, ce qui confirme le caractère local de la convergence de cette méthode.

5 Conclusion

Ce papier propose une démonstration de la convergence d'un algorithme adapté aux problèmes d'homogénéisation de composites à matrices élastomères.

Sa particularité réside dans le fait que par un judicieux découpage des équations du problème, on obtient un algorithme non incrémental qui converge de façon quadratique vers la solution recherchée.

Cette méthode est performante tant par les résultats mécaniques que par les temps de calculs requis. Son faible coût numérique nous permet dès lors d'étudier des composites de géométries plus complexes.

Afin d'une part d'appliquer cette méthode à des composites de nature variée et d'autre part de l'adapter à la simulation de l'évolution de l'endommagement en de tels milieux, l'étape en cours d'achèvement consiste à paralléliser cet algorithme de résolution (Brieu, 1999 [6]).

Références

- [1] BALL J., *convexity conditions and existence theorems in non linear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., Vol 63, p 337-403, 1977.
- [2] BENSOUSSAN A., LIONS J.L., PAPANICOLAOU G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, studies in applied mathematics and its applications, Vol. 5, North-Holland, 1978
- [3] BERNADOU M., CIARLET P.G., HU J., *Sur la convergence des méthodes incrémentales en élasticité nonlinéaire tridimensionnelle*, C.R.A.S., 295, I, p 639-642, 1982.
- [4] BERNADOU M., GEORGE P.L., HASSIN A., POLY P., PERONET E., SALTTEL E., STEER D., VANDERBORRCK G., *Modulef, Une bibliothèque modulaire d'éléments finis*, I.N.R.I.A., 1985.
- [5] BOISSE P., *Nouvel algorithme à grand incrément de temps pour le calcul des structures elastoplastiques*, Thèse de Doctorat, Université PARIS VI, 1987.
- [6] BRIEU M., *Homogénéisation et endommagement de composite élastomère par techniques de calcul parallèle*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1999.

-
- [7] BRIEU M., DEVRIES F., *Homogénéisation de composites élastomères. Méthode et algorithme*, C.R.A.S., 326, II, p.379-384, 1998.
 - [8] CIARLET P.G., *The finite element method for elliptic problem*, North-Holland, 1978.
 - [9] CIARLET P.G., GEYMONAT G., *Sur les lois de comportement en élasticité non linéaire compressible*, C.R.A.S., II, 295, p.423-426, 1982.
 - [10] CIARLET P.G., *The finite element method for elliptic problem*, North-Holland, 1978.
 - [11] COGNARD J.Y., *Une nouvelle approche des problèmes de plasticité et de viscoplasticité: La M.A.G.I.T.*, Thèse de Doctorat, Université PARIS VI, 1989.
 - [12] DHATT G., TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Les presses de l'Université de Laval Québec, 1981.
 - [13] DENIS J.E., SCHNABEL R.B., *Numerical methods for unconstrained and non-linear equations*, Computational Mathematics, Prentice Hall Series, 1983.
 - [14] DEVRIES F., *Calcul du comportement homogénéisé de composites hyperélastiques*, Revue des composites et des matériaux avancés, Vol. 6, n^o2, 1996.
 - [15] DUMONTET H., *Homogénéisation des matériaux stratifiés de type élastique linéaire, non linéaire, visco-plastique*, Thèse de 3^{ème} cycle, Université PARIS VI, 1983.
 - [16] DUVAUT G., *Mécaniques des milieux continus*, Masson, Paris, 1990.
 - [17] GEYMONAT G., MÜLLER S., TRIANTAFYLIDIS N., *Homogenization of nonlinearly elastic materials, microscopic bifurcations and macroscopic loss of rank-one convexity*, Arch. Rational Mech. Anal, 122, p. 231-290, 1993.
 - [18] LADEVEZE P. *Mécanique non linéaire des structures, Etudes en mécanique des matériaux et des structures*, Hermès, 1996.
 - [19] LAMBERT-DIANI J., REY C., *Elaboration de nouvelles lois de comportement pour les élastomères*, C.R.A.S., 1998.
 - [20] MÜLLER S., *Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials*, Arch. Rational Mech. Anal., 99, p. 189-212, 1987.
 - [21] RIVLIN R.S., *Large elastic deformation of isotropic materials I. fundamental concepts*, Phil. Trans. Roy. Soc., Vol. A240, p. 459-490, 1948.
 - [22] D.R.S. TALBOT, J.R. WILLIS: *Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of nonlinear composites*, I.M.A.J. Appl. Math., 39, p.215-240, 1987.

- [23] N. TRIANTAFYLLIDIS, B.N. MAKER: *On the comparison between microscopic instability mechanisms in a class of fiber reinforced composites*, J. Appl. Mech., Transactions of the A.S.M.E., 52, p.794-800, 1985.
- [24] J.R. WILLIS: *Variational and related methods for the overall properties of composites*, Adv. in Appl. Mech., 21, Academic Press, New York, p.1-78, 1981



Unité de recherche INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, Campus scientifique,
615 rue du Jardin Botanique, BP 101, 54600 VILLERS LÈS NANCY
Unité de recherche INRIA Rennes, Irisa, Campus universitaire de Beaulieu, 35042 RENNES Cedex
Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes, 655, avenue de l'Europe, 38330 MONTBONNOT ST MARTIN
Unité de recherche INRIA Rocquencourt, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex
Unité de recherche INRIA Sophia-Antipolis, 2004 route des Lucioles, BP 93, 06902 SOPHIA-ANTIPOLIS Cedex

Éditeur
INRIA, Domaine de Voluceau, Rocquencourt, BP 105, 78153 LE CHESNAY Cedex (France)
<http://www.inria.fr>
ISSN 0249-6399